JAO

https://academicopinion.org/

Research Article / Araştırma Makalesi

Doğrusal Olmayan Yapısal Eşitlik Modeline Bayesci Yaklaşım*

Bayesian Approach to the Nonlinear Structural Equation Model

Murat YILDIRIM[1] Mahmut KARTAL[2]

[1] Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, İşletme Bölümü, Tokat/Türkiye, murat.myildirim@gop.edu.tr

[2] Sivas Cumhuriyet Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, İşletme Bölümü, Sivas/Türkiye, mkartal@cumhuriyet.edu.tr

ÖZET

Son zamanlarda yapılan çalışmalar daha iyi bir nedensellik için modele gizli değişkenlerin doğrusal olmayan ilişkilerinin eklenmesinin oldukça yararlı olduğunu saptamıştır. Doğrusal olmayan ilişkiler, sosyal ve davranış bilimlerindeki birçok hipotezin sorgulanmasına izin vermekle birlikte bu alanda sağlam teorilerin kazanılmasını da sağlamaktadır. Doğrusal olmayan model türleri ve bunların tahmin teknikleri için yapılan çalışmalar Bayesci yaklaşımın kullanılmasına odaklanmaktadır. Fakat yaygın kullanılan programlar vasıtasıyla bu yaklaşım kullanılamamaktadır. Bu sebep ile bu alanda oldukça az pratik uygulama söz konusudur. Bu çalışmanın amacı, doğrusal olmayan modeller için Bayesci yaklaşımın kullanımını yaygınlaştırmaktır. Bu amacı giderebilmek için üç ana temel başlık oluşturulmuştur. İlk başlıkta doğrusal olmayan model türleri ve bunların tahmin tekniklerine yer verilmiştir. İkinci başlıkta Bayesci yaklaşımın kullanım nedenini öneren literatür tespitleri ile birlikte yaklaşım için motivasyon kaynaklarına değinilmiştir. Üçüncü başlıkta ise Bayesci yaklaşımın nasıl bir prensib ile çalıştığı yer almaktadır. Sonuç bölümünde ise uygulamacı araştırmacılar için bazı önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Bayesci Yaklaşım, Gibbs Örnekleyicisi, Yapısal Eşitlik Modeli*

MAKALE BİLGİSİ

Makale Geçmişi

Başvuru Tarihi: 17 Mayıs 2023

Kabul Tarihi: 9 Haziran 2023

Makale Türü

Araştırma Makalesi

ABSTRACT

Recent studies have found that adding nonlinear relationships of latent variables to the model is very useful for better causality. Nonlinear relationships allow the questioning of many hypotheses in the social and behavioral sciences, as well as providing solid theories in this field. Studies for nonlinear model types and their estimation techniques focus on the use of the Bayesian approach. However, this approach cannot be used through commonly used programs. For this reason, there is very little practical application in this field. The aim of this study is to popularize the use of the Bayesian approach for nonlinear models. In order to achieve this aim, three main headings have been established. In the first title, nonlinear model types and their estimation techniques are given. In the second title, the sources of motivation for the approach are mentioned together with the literature findings suggesting the reason for using the Bayesian approach. In the third title, there is how the Bayesian approach works with a principle.

Keywords: *: Bayesian Approach, Gibbs Sampler, Structural Equation Model.*

ARTICLE INFOS

Article History

Received: May 17, 2023

Accepted: June 9, 2023

Article Type

Research Article

1. Giriş

Yapısal eşitlik modeli (YEM) gizli ve gözlenen değişkenler arasındaki doğrusal ilişkileri (Jöreskog 1973, Bentler 1980, Bollen 1989) ele alan tarihsel bir gelişime sahiptir. Doğrusallık varsayımı YEM'in sıkça kullanıldığı birçok bilgisayar yazılımında da (EQS Bentler 1992, LISREL Jöreskog, Sörbom 1996) yer almaktadır. Ancak çoğu durumda bu doğrusallık sınırlaması, ilgilenilen kavramları açıklamak için yeterince esnek ve elverişli değildir (Lee ve Zhu, 2000: 209; Wall ve Amemiya, 2007: 321; Wall, 2009: 540).

Psikometri, eğitim ve pazarlama alanlarındaki araştırmacı bilim adamları, genellikle gizli değişkenlerde ikinci dereceden ve/veya etkileşim terimleri içeren modelleri dikkate almak isterler (Arminger ve Muthen, 1998: 271).

Uygulamada ise doğrusal olmayan ilişkiler, değişkenlerin etkileşim ve kuadratik terimleri olarak ele alınması ile birçok alanda sağlam teorinin kurulmasını sağlamıştır. Örneğin, sosyal psikolojideki gerekçeli eylem teorisi, beklenti-değer tutumu teorisi (Ajzen ve Fishbein, 1980) veya planlı davranış teorisinin bir uzantısı (Ajzen, 1991) etkileşimleri içerir. Planlı davranış teorisinin bir uzantısının örneği için Elliott, Armitage ve Baughan (2003)'e bakılabilir. Eğitim psikolojisinde çok sayıda teori, bir öğretim yönteminin belirli takviye türlerinin farklı başarı seviyeleri ürettiğini göstermek için önerilmiştir. Örneğin Ganzach (1997), çocukların eğitimden beklenti düzeylerinin anne ve babanın eğitim düzeylerinin etkileşim ve kuadratik değişkenleri ile tutarlı olarak ilişkide olduğunu saptamıştır (Lee ve Zhu, 2000: 209- 210; Moosbrugger vd., 2009: 103).

Sosyal ve davranış bilimlerindeki çok sayıda teori, etkileşim ve/veya kuadratik etkileri (Örneğin, Ajzen, 1987; Cronbach & Snow,

* Bu çalışma, Prof. Dr. Mahmut Kartal danışmanlığında Murat YILDIRIM tarafından tamamlanan "*Bayesci doğrusal olmayan ortak değişkenli yapısal eşitlik modeli: fomo sosyal medya bağımlılığı ve akademik motivasyon arasındaki ilişki*" başlıklı doktora tezinden yararlanılarak üretilmiştir.

Atıf/Cite as: Yıldırım, M., Kartal, M. (2023). Doğrusal Olmayan Yapısal Eşitlik Modeline Bayesci Yaklaşım. *Journal of Academic Opinion*, 3(1): 16-26.

1977; Karasek, 1979; Lusch & Brown, 1996; Snyder & Tanke, 1976) ele alan hipotezlere sahiptir (Kelava ve Brandt, 2009: 123). Bu sebeple doğrusallık sınırlamasını genişleterek genel YEM yaklaşımına gizli değişkenlerin doğrusal olmayan ilişkilerini (literatürde sıkça kullanılanlar etkileşim ve ikinci dereceden etkiler) modele dâhil edilerek tahmin edilmesi mevcut YEM'i daha da iyi bir yöntem yapacaktır (Wall ve Amemiya, 2007: 321).

Son zamanlarda yapılan çalışmalarda, bağımsız gizli değişkenlerin doğrusal olmayan terimlerinin, bağımlı gizli değişkenleri değerlendirmek için daha doğru ve anlamlı bir yapısal denklem geliştirmede yararlı olduğu anlaşılmıştır. Örneğin; Busemeyer ve Jones (1983), Kenny ve Judd (1984), Bagozzi, Baumgartner ve Yi (1992), Ping (1996), Schumacker ve Marcoulides (1998), Bollen ve Paxton (1998), Jonsson (1998) vb. çalışmalarda görülebilir (Lee ve Song, 2003: 27).

Farklı türde doğrusal olmayan YEM türlerinin tanımlanması ve bunların tahmini için geliştirilen birçok yöntemle birlikte bu alanda büyüyen büyük bir literatür vardır (Wall ve Amemiya, 2007: 321).

Doğrusal olmayan YEM için ilk çalışma 1984 yılında Kenny ve Judd tarafından geliştirilmiş olup ilerleyen dönemde tahmin tekniği çalışmaları üç ana başlık altında toplanmıştır. Geliştirilen tahmin teknikleri için yapılan simülasyon (Lee, Song ve Poon 2004) ve karşılaştırmalı çalışmalar ışığında (Kelava, Nagengast 2012) birçok bilim insanı (Arminger ve Muthen 1998, Zhu ve Lee 1999, Lee ve Zhu 2000, Lee ve Song 2003b) Bayesci yaklaşımı önermişlerdir (Kelava ve Nagengast, 2012: 717- 742; Lee vd., 2004: 37- 67; Ma, 2006: 15; Song ve Lee, 2006: 338).

Fakat YEM uygulamaları için yaygın bir biçimde kullanılan paket programlarda (ör. LISREL, AMOS) doğrusal olmayan modellere yönelik Bayesci çıkarımlar üretilememektedir. Daha iyi bir tahminleme ya da daha iyi bir nedenselliği ortaya çıkarmak adına doğrusal olmayan terimlerin varlığı YEM'in sıkça kullanıldığı sosyal ve davranış bilimleri için kabul görmüş bir gerçeklik olmasına rağmen bu model yapılarına sahip çok az pratik uygulama vardır (Moosbrugger vd. 2009: 103). Bu durumun temel nedeni, Rigdon, Schumacker ve Wothke'nin de belirttiği gibi, yaygın olarak kullanılan YEM paket programlarının, doğrusal olmayan etkilerin analizinde doğru çözümler üretememesinden kaynaklanmaktadır (Lee vd., 2007: 405- 406).

Bu çalışmanın amacı, doğrusal olmayan YEM için Bayesci yaklaşımın kullanımını yaygınlaştırmaktır. Bu amacı açıklığa kavuşturabilmek için çalışmanın ilk bölümünde doğrusal olmayan model türleri ve tahmin yaklaşımlarına yer verilmiştir. Çalışmanın ikinci bölümünde geliştirilen tahmin yöntemleri hakkında kısa bir değerlendirme ile birlikte Bayesci yaklaşım için motivasyon kaynaklarına değinilmiştir. Üçüncü bölümde ise doğrusal olmayan model için Bayesci yaklaşımın nasıl çalıştığı, notasyonlara fazla bağımlı kalınmadan ve mananın anlaşılabilir olabilmesi için bazı alt başlıklarla verilmeye çalışmıştır. Sonuç bölümde ise uygulamalı araştırmacılar için değerlendirmeler ve öneriler yer almaktadır.

2. Doğrusal Olmayan Yapısal Eşitlik Modeli ve Tahmin Yaklaşımları

Bu bölüm iki alt bölümden oluşmakta olup ilk konu başlığı doğrusal olmayan YEM için geliştirilen tahmin yaklaşımları hakkındadır. Bu alt bölümde geliştirilen ilk tahmin tekniğinden günümüze kadar olan gelişmeler kısa bir biçimde özetlenmeye çalışılmıştır. Diğer alt bölümde ise doğrusallık sınırlaması genişletilerek doğrusal olmayan model yapısının YEM'in form yapısında nasıl bir yer bulduğu ve bu yapının nasıl bir çeşitlenmeye sahip olabileceği verilmeye çalışılmıştır.

2.1. Doğrusal Olmayan Yapısal Eşitlik Modeli İçin Tahmin Yaklaşımları

Doğrusal olmayan YEM için literatürde geliştirilen yaklaşımlar belirli bir çatı altında toplanmaktadır. Aşağıda üç temel çatı altında toplanan tahmin yöntemleri hakkında bazı bilgilere değinilmiştir (Codd, 2011: 4).

<u>İndikatör Üretme Yaklaşımları</u>: Doğrusal olmayan YEM için literatürdeki ilk çalışma 1984 yılından Kenny ve Judd tarafından ortaya konmuştur. Doğrusal olmayan ilişkilere ilk bakış açısını getiren bu çalışmada, ikinci dereceden ve etkileşimli etkilerin tahmini için gözlenen değişkenler vasıtasıyla bu terimlerin "indikatörleri/göstergeleri" oluşturulmuştur. Bu yüzden de geliştirilen bu yaklaşım "Kenny-Judd" ya da "Basit Kısıtlı İndikatör Üretme (PI)" olarak isimlendirilmiştir. Ortaya çıkarılan bu yaklaşım birçok araştırmanın ortaya çıkmasını ve aynı zamanda da yöntemin derinlemesine incelenerek yeni yöntemlerin doğmasını (Hayduk 1987; Jöreskog, Yang 1996, 1997; Schumacker ve Marcoulides 1998; Moulder ve Algina 2002; Wall ve Amemiya, 2001) sağlamıştır (Altındağ, 2015: 96- 97; Codd, 2011: 5- 6; Marsh vd., 2012: 439; Wall, 2009: 540- 541).

Yöntemin görsel açısından ifadesi için Ganzach'ın ebeveyn ve çocukların eğitimden beklenti düzeyi modelindeki açık değişkenleri gizli değişken alarak örnek verilebilir. Ganzach modeli aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Kelava vd., 2011: 466- 467):

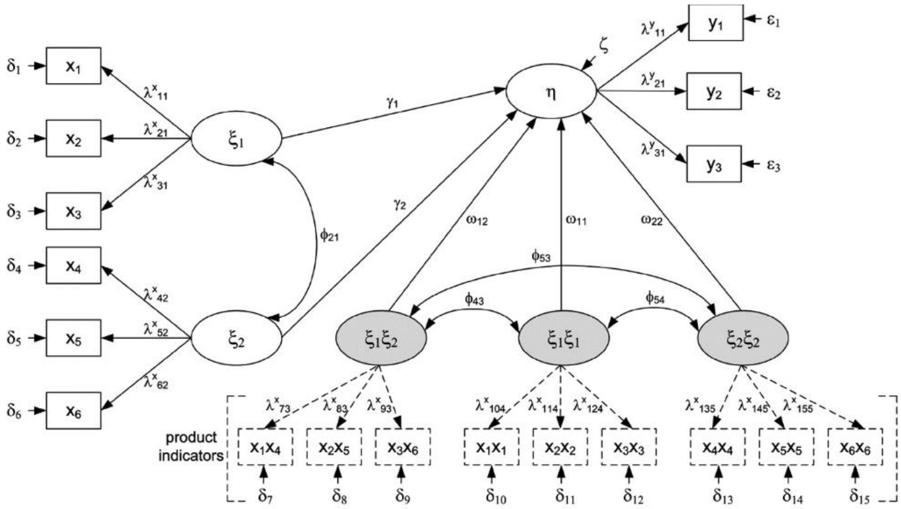
$$ÇEB = \beta_0 + \beta_1 AED + \beta_2 BED + \omega_{12} AED.BED + \omega_{11} AED^2 + \omega_{22} BED^2 + \epsilon \tag{1}$$

Eşitlik 1' de ÇEB çocuğun eğitim beklentisi, AED annenin eğitim düzeyi, BED babanın eğitim düzeyi, β_s doğrusal katsayılar, ω_s ise doğrusal olmayan katsayılardır. Burada bahsi geçen değişkenler gizli değişkenler olarak aktarılır ise;

$$\eta = \alpha + \gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \xi_2 + \omega_{12} \xi_1 . \xi_2 + \omega_{11} \xi_1^2 + \omega_{22} \xi_2^2 + \zeta \tag{2}$$

elde edilebilir.

Şekil 1
İndikatör Üretme Yaklaşımı



Şekil 1, bir gizli etkileşim etkisi ile iki gizli kuadratik etkiye sahip doğrusal olmayan modeli ifade eder. Burada gizli (η, ξ_1, ξ_2) değişkenler üçer gözlenen değişken $(y_1, \ldots, y_3; x_1, \ldots, x_3; x_4, \ldots, x_6)$ ile ölçümlenmiş olup doğrusal olmayan etkilere sahip gizli değişkenler ise $(\xi_1.\xi_2, \xi_1^2, \xi_2^2)$ indikatörler $x_1x_4, x_2x_5, \ldots, x_6x_6$ ile ölçümlenmiştir. Burada dikkat edilmesi gereken bir husus vardır. O da doğrusal olmayan modeller için diğer dağılım analitik yaklaşımların, gizli değişkenlerin doğrusal olmayan terimleri için ölçüm modeline ihtiyaç duymamasıdır. Yani Şekil 1'de kesikli çizgilerle ifade edilen yapının diğer tahmin yöntemleri için gerekli olmadığıdır.

Geliştirilen ilk yaklaşımdan sonra Hayduk (1987) LISREL ile bu yaklaşımın kullanılmasını sağlamaya çalışmış fakat elverişsiz olduğu kanaatini ortaya çıkarmıştır. İlerleyen dönemde yaklaşım düzenlenerek "Kısıtlı İndikatör Üretme (Kısıtlı PI)" (Algina ve Moulder, 2001; Jöreskog ve Yang, 1996) olarak ele alınmıştır. Yaklaşım için farklı bir düzenleme Wall, Amemiya (2001) tarafından gözlenen değişkenlerin dağılımlarının normallik varsayımını sağlamadığı durumlar için geliştirilmiştir. Çünkü geliştirilen ilk yaklaşım normalliğin olmadığı durumlarda yanlı sonuçlar üretmektedir. Bu sebeple ilk yaklaşım yeniden düzenlenerek "Genelleştirilmiş Etkili İndikatör Üretme-Generalized Appended Product Indicator GAPI" ismi ile literatüre kazandırılmıştır. Chin vd. (2003) "Kısmi En Küçük Kareler Yöntemi-Partial Least Square- PLS" yaklaşımı kullanarak "Kısmi En Küçük Kareler İndikatör Üretme" yöntemini geliştirmişlerdir. Yalnız PLS birçok çalışmada da (ör. Rönkkö ve Evermann, 2013) görüleceği üzere yanlı sonuçlar üretmektedir. Marsh vd. (2004) GAPI yaklaşımı üzerine "Kısmen Kısıtlı İndikatör Üretme" yaklaşımını, Kelava (2008) ise "Genişletilmiş Kısıtlı İndikatör Üretme" ve "Genişletilmiş Kısıtsız İndikatör Üretme" yeni yaklaşımları geliştirerek önermişlerdir. İndikatör üretme yaklaşımına dayalı olarak geliştirilen bu yaklaşımların özet çizelgesi aşağıda ifade edildiği gibidir (Altındağ, 2015: 96- 97; Codd, 2011: 6- 7; Cham vd., 2012: 841- 843; Marsh vd., 2004: 276- 277; Şen-Doğan, 2017: 6- 7):

Tablo 1
İndikatör Üretme Yaklaşımları

Basit Kısıtlı İndikatör Üretme- Kenny Judd (Product Indicator- PI)	Kenny, Judd 1984
Kısıtlı İndikatör Üretme (Constrained Product Indicator - CPI)	Algina, Moulder 2001 Jörekog, Yang 1996
Genelleştirilmiş Etkili İndikatör Üretme (Generalized Appended Product Indicator- GAPI)	Wall, Amemiya 2001
Kısmi En Küçük Kareler İndikatör Üretme (PLS- PI)	Chin vd. 2003
Kısmen Kısıtlı İndikatör Üretme (Partially Constrained Product Indicator)	Marsh vd. 2004
Genişletilmiş Kısıtlı İndikatör Üretme (Extended Constrained Product Indicator)	Kelava 2008
Genişletilmiş Kısıtsız İndikatör Üretme (Extended Unconstrained Product Indicator)	Kelava 2008

Doğrusal olmayan ilişkilerin tahmini için geliştirilen indikatör üretme yaklaşımları, aslında basit etkileşimli ve ikinci dereceden etkilerin tahmini için uygulanabilir bir yöntem olup doğrusal YEM programlarında da uygulanabilir. Yalnız bu tekniklerin çok daha genel doğrusal olmayan YEM için kullanılabilir olduğu söylenemez (Wall, 2009: 541). Çünkü bu yaklaşımlar birçok noktada pratik ve teorik eksikliklere sahiptirler. Bu eksiklikler üç noktada açıklanabilmektedir. Birincisi doğrusal olmayan gizli değişkenler için göstergelerin/indikatörlerin anlık olarak oluşturulması dolambaçlıdır ve kavramsal olarak çekici değildir. İkincisi, modeli tahmin etmek için gereken kısıtlamaları türetmek yorucudur. Özellikle de model her değiştirildiğinde kısıtların sayısı ve biçimi değiştiğinden bu durum oldukça zor bir hal almaya başlamaktadır. Sonuncusu ise indikatör üretme yöntemleri, doğrusal olmamayı etkileşim ve ikinci dereceden terimlerle sınırlar. Bu durum doğrusal modellere göre bir gelişme olsa da aslında bu tip doğrusal olmama biçimleri karmaşık temel sorunları açıklayacak kadar geniş değildir (Codd, 2011: 7- 8; Marsh vd., 2012: 440- 441). Bu yüzden genel doğrusal olmayan YEM çalışmalarını yapabilmek için farklı yaklaşımlara sahip yöntemler de geliştirilmiştir. Bunlar "İki Aşamalı Yöntemler" ile "Olabilirliğe Dayalı Yöntemler"dir.

İki Aşamalı Yöntemler: Kavramsal bakış açısına göre bu yöntemler indikatör üretme yöntemlerinden daha çekicidir. Yalnız bu durum iki aşamalı yöntemlerin tüm parametreleri aynı anda tahmin edilebilmesi ile ideal bir noktaya varacaktır. Genel olarak bu yöntemlerin amacı, ölçüm ve yapısal modelleri ayrı ayrı tahmin etmektir. Çoğunlukla, oldukça esnektirler ve pratikte uygulanması nispeten kolaydır. Bu iki aşamalı yöntemlere ait bazı bilgiler aşağıdaki çizelge ile verilmiştir (Codd, 2011: 8- 10; Holst ve Jorgensen, 2020: 677; Marsh vd., 2004: 277; Schumacker, 2002: 40- 54):

Tablo 2

İndikatör Üretme Yaklaşımları

Gizli Değişken Skorları (Latent Variable Scores- LVS)	Schumacker 2002
İki Aşamalı En Küçük Kareler (2-Stage Least Square- 2SLS)	Bollen 1995, Bollen, Paxton 1998
İki Aşamalı Momentler (2-Stage Moments Methods- 2SMM)	Wall, Amemiya 2000

Olabilirliğe Dayalı Yöntemler: Bu yöntemler indikatör üretme yaklaşımından sonra yakın tarihte geliştirilmiş olup doğrusal olmayan yapı için indikatör üretmek yerine modele ait bir olabilirlik fonksiyonunun yazılmasına dayanmaktadır. Doğrusal modeller için en çok kullanılan yöntem ML (Maximum Likelihood) olup bu yöntemin kullanıldığı programlar "çok değişkenli normallik varsayımına" sahiptir. Veriler normallik varsayımını sağlasa da doğrusal olmayan ilişkilerin varlığı ile normallik varsayımı ihlal edilmiş olacaktır. Bu yüzden bu başlık altındaki yöntemlerin amacı, doğrusal olmayan ilişkilere sahip modellerin parametrik formu için gizli değişkenlerin ve hataların dağılım varsayımları verildiğinde, teorik olarak bir olabilirlik fonksiyonu yazmak ve bu fonksiyonu yakınsayabilmektir. Olabilirliğe dayalı olarak geliştirilmiş olan yöntemler hakkındaki bazı bilgiler aşağıda verilmiştir (Codd, 2011: 10; Cham vd., 2012: 843- 844; Marsh vd., 2004: 277; Şen-Doğan, 2017: 8, 33; Wall, 2009: 541):

Tablo 3

Olabilirliğe Dayalı Yöntemler

Yarı En Çok Olabilirlik (Quasi Maximum Likelihood- QML)	Yang, Jonsson 1997 Klein, Muthen 2007
Gizli Moderatör Yapısalı (Latent Moderated Structural- LMS)	Schermelleh, Engel vd. 1998 Klein, Moosbrugger 2000
Etkili Momentler (Efficient Method of Moments- EMM)	Gallant, Tauchen 1996
Marjinal En Çok Olabilirlik (Marginal Maximum Likelihood-MML)	
Bayesci (Bayesian)	Arminger, Muthen 1998

Olasılığa dayalı yöntemler arasında çok az karşılaştırma yapılmıştır. Umut verici istatistiksel özelliklerine rağmen olabilirliğe dayalı yöntemlerin pratik biçimde kullanılması kolay değildir. Yalnız bu yöntemlerin indikatör üretme ve iki aşamalı yöntemlerden genellikle daha iyi performans gösterdiğini varsaymak mantıklıdır (Codd, 2011: 12).

Olabilirliğe dayalı yöntemler için sıkıntı hesaplama zorluğuydu. Burada bahsedilen hesaplama zorluğu, modeldeki doğrusal olmayan formun kapalı analitik biçime sahip olmayan olasılık üretmesi idi. Ancak son yirmi yılda zorlayıcı sonsal dağılımlardan sonuç çıkarmak, istatistiksel hesaplama yöntemleri sayesinde yapılabilinir bir hal almıştır. Bu hesaplama yöntemlerine dayanarak özellikle doğrusal olmayan yapısal denklem modellerinin farklı formlarının tahmini için "Tam en çok olabilirlik (Full/Exactly Maximum Likelihood)" ve "Bayesci yöntemleri" kullanmaya odaklanan ve giderek büyüyen büyük bir literatür vardır (Wall, 2009: 541).

2.2. Genel Doğrusal Olmayan Yapısal Eşitlik Modeli

Birçok bilimsel teoriyi deneysel/ampirik olarak değerlendirmenin doğal bir yolu, popülasyondan belirli bir örneklemin elde edilmesiyle değişkenleri ölçümlemek ve ardından bu değişkenler arasındaki bazı olası ilişkileri incelemektir. Bu düşünce YEM'in ölçüm modeli ile yapısal modeline uymaktadır. Ölçüm modeli ile değişkenler ölçümlenirken yapısal model ile de değişkenlerin bazı olası ilişkileri incelenmektedir. Bu noktada basit bir genişletme düşüncesi, değişkenlerin ölçüm modeli ile ölçümlenmesini makul karşılamakta; ancak değişkenler arasında doğrusal ilişkilerin dışında daha karmaşık ilişkiler olabilmektedir. Doğrusal olmayan karmaşık ilişkiler yapısal model ile ele alınacağından genel doğrusal olmayan YEM'i doğrusal YEM'in genişletilmiş bir uzantısı olarak ele alınabilir. Bu sebepten ötürü, tanıtılacak olan genel doğrusal olmayan yapısal eşitlik modeli, doğrusal ölçüm modelini korurken doğrusal olmayan yapısal ilişkileri ele almaktadır. Burada LISREL notasyonları ile sadece genişletme işlemlerinin geçişi anlatılmaya çalışılmıştır. Bu genişletme işlemlerinde doğrusal YEM için kullanılan varsayımlar doğrusal olmayan YEM'in de elde edilmesinde kullanılmaktadır. Çalışmada çok fazla yer kaplamaması adına bu varsayımların bilindiği varsayılmaktadır (Wall ve Amemiya, 2007: 323- 326):

Doğrusal YEM'in içsel ve dışsal gizli değişkenlerinin eşanlı denklem formu yani yapısal denklem formu (sıkça kullanım şekli) aşağıdaki gibidir.

$$\eta = b + B\eta + \Gamma\xi + \zeta \tag{3}$$

Eşitlik (3) "kapalı formda" olup çözümleme işlemi $(I - B)$'nin tersi olmasına bağlıdır. Bu durum doğrusal YEM için varsayım olarak da geçmektedir. Eşitliğin her iki tarafı bu varsayımın sağlanması ile $(I - B)$ ile çarpılarak indirgenmiş form aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\eta = b^* + \Gamma^*\xi + \zeta^* \tag{4}$$

Eşitlik (4)'de geçen $b^* = (I - B)^{-1}b$, $\Gamma^* = (I - B)^{-1}\Gamma$ ve $Var(\zeta^*) = (I - B)^{-1}\psi(I - B)^{-1'}$dir. Burada bahsedilecek birçok varsayım, doğrusal YEM'in temel varsayımları olduğundan burada bahsedilmemiştir.

Doğrusal olmayan yapısal modeli yukarıda forma benzer biçimde aşağıdaki gibi yazabilir.

$$\eta = H(\eta, \xi; B) + \zeta \tag{5}$$

Eşitlik (5) şu bilgileri içermektedir:

H:(dx1) boyutlu bilinmeyen parametrelere sahip vektör fonksiyonu.

ζ, ξ'den bağımsız rassal eşitlik hatası olup $E(\zeta) = 0, Var(\zeta) = \Psi$. Ψ ise (dxd) boyutlu sabit ya da bilinmeyen değerlerden oluşan matristir.

H fonksiyonu hem içsel hem de dışsal gizli değişkenleri içeren eş zamanlı bir fonksiyon olup kapalı formdadır. Bu durumda çözümlemenin sağlanabilmesi için indirgenmiş formun elde edilmesi tek yoldur. Yalnız buradaki indirgeme işlemi doğrusal yapısal denklemdeki gibi kolay değildir. Bu durum için H fonksiyonun içsel gizli değişkenleri içermeyen bir yapıya sahip olduğu varsayımı ile ilerleme kaydedilebilir. Bu varsayımın sağlandığı düşünülür ise Eşitlik (5)'in indirgenmiş formu,

$$\eta = h(\xi, \zeta; B^*) \tag{6}$$

olacaktır. Buradaki h fonksiyonu (dx1) boyutlu bilinmeyen parametrelere sahip vektör fonksiyonudur.

Doğrusal olmayan YEM' in kullanım nedenleri ya da amaçları düşünüldüğünde sıkça kullanılan doğrusal olmayan yapısal modeli aşağıdaki gibi tasvir edilebilir.

$$\eta = b + Bf(\eta) + \Gamma g(\xi) + \zeta \tag{7}$$

Eşitlik (7)'e dikkat edilir ise hem η'ların hem de ξ'lerin doğrusal olmayan yapılarını içerebilecek olan $f(\eta)$ ve $g(\xi)$ gibi vektör fonksiyonlarına sahip olduğu görülmektedir. Bu durum doğrusal olmayan yapıları genişleterek birçok ilişki türünün de tahmin edilmesini sağlamaktadır. Örneğin "ikinci dereceden etkiler, etkileşim etkileri, özyinemeli etkiler" gibi. Yalnız birçok doğrusal olmayan ilişki türlerine sahip modelleri tahmin etme işlemi için belirgin bir kısıtlama, anlaşılacağı üzere η'ların ξ'lerin bir fonksiyonu olarak yazılması yani indirgeme işleminin sağlanmasıdır (Codd, 2011: 17).

Yukarıda doğrusal yapısal denklemin indirgeme işlemi ile çözümlenmesini, doğrusal olmayan yapısal denklem için indirgeme işlemini sağlayabilecek varsayım ile indirgemenin sağlanabileceği ve böylelikle de öğrenilmek istenen ilişkilerin tahminin yapılabilineceğinden bahsedilmiştir. Burada ayrıca değinilmesi gereken nokta doğrusal olmayan yapının (Eşitlik 6) birçok türe sahip olabileceğidir. Aşağıda, indirgeme işlemi her biri için yapılabilen ve böylelikle genel doğrusal olmayan YEM'in alt türleri olan birkaç doğrusal olmayan yapısal model yer almaktadır (Wall ve Amemiya, 2007: 324- 326):

1. η'ların doğrusal ξ'lerin doğrusal olmadığı modeller:

$$\eta = B\eta + g(\xi, \gamma) + \zeta \tag{8}$$

Eşitlikte 8'de g fonksiyonu, γ bilinmeyen parametreli ξ'lerin doğrusal olmayan vektör fonksiyonunu temsil etmektedir. Ve ayrıca $(I - B)$ tersinirdir. Böylelikle kapalı form indirgenebilir. Ayrıca eşitlikle verilen model özyinelemelisiz modelleri kapsayan bir yapıya sahiptir.

2. Hem η'ların hem de ξ'lerin doğrusal olmadığı modeller- Doğrusal olmayan yinelemeli modeller:

Bu modellerde her iki gizli değişken türü de doğrusal değildir. Ancak denklem sistemi yinelemelidir. Yani bir denklem diğerine ikame edilebilendir. Bu durumda eşanlı yapısal denklem sistemi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \eta_1 &= g_1(\xi, B_1) + \zeta_1 \\ \eta_2 &= g_2(\eta_1, \xi, B_2) + \zeta_2 \\ &\vdots \\ \eta_d &= g_d\big(\eta_1, \ldots, \eta_{(d-1)}, \xi, B_d\big) + \zeta_d \end{aligned} \tag{9}$$

Burada $g_1, g_2, \ldots, g_d$, gizli değişkenlere ve bilinmeyen parametrelere $B_1, B_2, \ldots, B_d$ karşılık gelen doğrusal olmayan fonksiyonudur. Üçgen özyinelemeli formun bir sonucu olarak, modelin ikame ile indirgenmiş biçimde yazılabileceğini görmek basittir. Ancak denklem hatası ζ'ların indirgenmiş formda mutlak ayrımının olmayacağı söylenebilmektedir.

3. η'ların doğrusal ξ'lerin ise eklemeli olarak doğrusal olmadığı modeller:

Bu model sınıfında parametreler doğrusal, dışsal gizli değişkenler ise doğrusal olmayan yapıda tasvir edilmektedir. Böylelikle bu model sınıfı Eşitlik (8)'in kısıtlanmış halidir. Eşitlik (8)'de geçen $g(\xi, \gamma)$ fonksiyonu bu model sınıfında doğrusal olmayan yapısı sadece ξ'lerle sınırlıdır. Aşağıda bu model sınıfı tasvir edilmiştir.

$$\eta = B\eta + \Gamma g(\xi) + \zeta \tag{10}$$

Eşitlik (10)'da Γ (dxr) boyutlu sabit ya da bilinmeyen değerlerden oluşan matristir. r ekleme sayısını göstermek üzere $g(\xi)$ eklemeli fonksiyon şu durumu belirtmektedir: $g(\xi) = (g_1(\xi), g_2(\xi), \ldots, g_r(\xi))'$ (rx1) boyutlu vektör fonksiyonu, dışsal gizli değişkenlerin bilinmeyen fonksiyonudur.

Literatürde bu model sınıfı ve özellikle polinomlar için alt sınıflar ve ayrıca ikinci dereceden modeller bu zamana kadar tam anlamıyla incelenmiştir. Çalışmalar ξ'lerin normallik varsayımı ve ölçüm modelinin doğrusal olma durumu altında Arminger ve Muthen (1998) ve Zhu ve Lee (1999) Eşitlik (10) için Bayesci yöntemi tanımlar iken Lee ve Zhu (2002) tam en çok olabilirlik yöntemini tanıtmışlardır. Eşitlik (10) diğer birçok araştırmada da incelenmiştir. Örneğin Lee ve Zhu (2000); Lee ve Song (2003); Song ve Lee (2002); Lee ve Lu (2003) gibi çalışmalar literatürde mevcuttur.

4. Genel polinom sınıf modelleri:

Bu sınıf, Eşitlik (10)'da geçen $g(\xi)$'nin "tüm kuvvetleri" ve "tüm elemanlarının çoklu etkileşimlerini" kapsayacak şekilde kısıtlanmasıyla oluşmaktadır. Bu sınıf "genel sıralı polinom yapısal eşitlik modeli" olarak adlandırılırken tahmin yöntemi Wall ve Amemiya (2000, 2003) tarafından tanımlanmıştır.

5. Kuadratik ve etkileşimli model sınıfı:

Bu sınıf da diğer sınıf modellerinin elde edilmesi gibi bir önceki model sınıfı olan genel polinom modellerinin kısıtlanmasıyla oluşmaktadır. Genel polinom modelleri için basit bir kısıtlama, ikinci dereceden modelle sınırlamış ise ikinci dereceden ve/veya etkileşimli yapısal denklem modeline sahip olunduğunu belirtmektedir. Bu tür modeller, kuadratik (ikinci dereceden) ve etkileşimli model sınıfını tasvir etmektedir. Aşağıda bu sınıf için üç farklı tür verilmiştir.

$$\eta = \gamma_0 + \gamma_1\xi + \gamma_2\xi^2 + \zeta \tag{11}$$

$$\eta = \gamma_0 + \gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \gamma_3\xi_1\xi_2 + \zeta \tag{12}$$

$$\eta = \gamma_0 + \gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \gamma_3\xi_1\xi_2 + \gamma_4\xi_1^2 + \gamma_5\xi_2^2 + \zeta \tag{13}$$

Yukarıdaki ilk eşitlik "ikinci dereceden etkiye sahip yapısal modeli", ikinci eşitlik "etkileşim etkisine sahip yapısal modeli" ve üçüncü eşitlik "hem etkileşimli hem de ikinci dereceden bir etkiye sahip yapısal modeli" belirtmektedir. Bu sınıf, doğrusal olmayan YEM için sıkça kullanılan sınıftır.

3. Tahmin Yaklaşımları için Değerlendirmeler ve Bayesci Yaklaşım için Motivasyon Kaynakları

Bu bölüme kadar tahmin yaklaşımları ve genel doğrusal olmayan model türleri hakkındaki bilgilere kısaca değinilmeye çalışılmıştır. Bu bölümde ise geliştirilen tekniklerin literatürdeki karşılaştırılması/değerlendirilmesi ile birlikte araştırmacıları Bayesci yaklaşıma yönelten motivasyon kaynakları öz bir biçimde verilmiştir. İlk olarak literatürdeki tahmin teknikleri hakkındaki değerlendirmeler şu şekildedir:

Gizli değişkenlerin doğrusal olmayan ilişkilerinin tahmini, Kenny ve Judd (1984) ilk/öncü çalışmalarından bu yana literatürde oldukça dikkat çeken (Hayduck 1987, Ping 1996, Jaccard ve Wan 1995, Jöreskog ve Yang 1996- 1997, Schumacker ve Marcoulides 1998, Li vd. 1998 ve büyüme eğrisi modellemesi için de Li vd. 2000, Wen vd., 2002) bir konu olmuştur. Kenny ve Judd tarafından önerilen tahmin yaklaşımı, ölçüm modelinde gösterge değişkenleri yapay olarak çoğaltma işlemi yaparak etkileşim ve kuadratik değişkenlerin gözlenen değişkenlerini üretmeyi içermekte, fakat bu durum model kovaryans matrisinde oldukça ciddi kısıtlamalara neden olmaktaydı ama yine de çözüm için LISREL 8 (Jöreskog & Sörbom, 1996) ile ML yaklaşımı kullanılabilmekteydi. Yaklaşım ξ_i'ler için normallik varsayımına dayanmakta, gözlemlenen indikatörler normal dağılmadığında tutarsız tahmin ediciler ürettiği tespit edilmiştir (Wall ve Amemiya, 2001: 1- 29; Wall ve Amemiya, 2007: 326).

Literatür, bu yaklaşımda sorun teşkil eden konuları şu şekilde özetlemiştir: Yaklaşımın indikatör üretmek için sağlam teorik bir temelinin olmayışı, farklı indikatörler kullanılarak elde edilen sonuçların farklı olması ve ML'nin çok değişkenli normallik varsayımının ihlaline karşın sağlamlılığı konularıdır (Lee vd., 2007: 405).

Literatürde etkileşim etkilerini analiz etmek için ilgi çeken diğer birçok yaklaşım ise şunlar olmuştur: Bunlar, Moment temelli yaklaşımlar (Marsh, Wen ve Hau, 2004; Wall ve Amemiya, 2003) ve karışım dağılımlarını kullanan (Klein ve Moosbrugger, 2000 LMS) dolaylı ML'dir (Song ve Lee, 2006: 338).

Doğrusal olmayan YEM için geliştirilen yöntemlerin çoğunluğu gizli değişkenler ile ölçüm hatası üstündeki normallik varsayımını gevşetme eğilimindedir. Aynı zamanda bu gevşetme ile geliştirilen yöntemler yanlı parametre tahminine ve böylelikle de tahmin gücünün azalmasına sebebiyet vermektedir (Qin, 2018: 13).

Türevlenebilir fonksiyonlar (etkileşimi ve ikinci dereceden terimleri özel durum olarak ele alan) tarafından formüle edilen gizli değişkenlerin daha genel doğrusal olmayan yapıları için tam ML (Full/Exact ML Approach) yaklaşımı (Lee ve Zhu, 2002) ve Bayesci yaklaşımlar (Arminger ve Muthén, 1998; Lee ve Song, 2003; Song ve Lee, 2007) geliştirilmiştir (Lee vd., 2007: 405; Song ve Lee, 2006: 338).

Literatürde geliştirilen yaklaşımlar, birçok noktada eksikliklere, zayıflıklara sahipken bazı konularda ise güçlü yönlere sahiptirler. Hangi yaklaşımın daha iyi bir tahminleme yaptığını bulmak adına çok fazla olmasa da birçok karşılaştırmalı çalışma yapılmıştır. Geliştirilen birçok yöntem bu çalışmalar sayesinde kullanılabilirliği test edilmiş olup uygulamalı araştırmacılar için kaynak niteliğindedir. Bu çalışmalar hakkında bazı kısa bilgiler şu şekilde özetlenebilinir:

Lee, Song ve Poon (2004), etkileşimli ve kuadratik etkilere sahip doğrusal olmayan YEM için geliştirilen dört farklı yöntemin deneysel çalışmalardaki performansını değerlendirmek adına simülasyon çalışması yürütmüşlerdir. Çalışmada kullanılan yöntemler çoklu indikatör ML yaklaşımı (Jaccard ve Wan, 1995), tek indikatör ML yaklaşımı (Jöreskog ve Yang, 1996), Bayesci yaklaşım (Zellner 1971; Arminger ve Muthen, 1998) ve tam ML (Lee ve Zhu, 2002) yaklaşımıdır. Bu dört yaklaşım etkileşim modeli, kuadratik model ve bu iki modelin birleşimi olan üç farklı model üzerinde örnek hacmi 150 ve 300 olmak üzere değerlendirilmiş olup bilinmeyen parametreler için iki farklı veri girişi sağlamışlardır. Elde edilen bulgular, tam ML ve Bayesci yaklaşımın tüm incelenen detaylarda güvenilir sonuçlar üretirken indikatör ML yaklaşımları sadece büyük örnekleme sahip basit modellerde makul sonuçlar ürettiği yönünde olmuştur. Önerileri; çalışmada gerçekleştirilmeyen hipotez testleri, model karşılaştırmaları ve model seçimi konularında bu yaklaşımların değerlendirilmesi şeklindedir (Lee vd., 2004: 37- 67).

Wall (2009), doğrusal olmayan YEM için ML ve Bayesci yaklaşımı ele almıştır. Uygulamada SAS Proc NLMIXED, WinBUGS ve Mplus programları kullanılmış olup bu iki yaklaşım sunulan modellerde benzer sonuçlar üretmiştir. Önerisi ise kullanılan programlar vasıtasıyla doğrusal olmayan YEM'in gerçek teorilerle uygulanabileceğidir (Wall, 2009: 540- 591).

Kelava ve Nagengast (2012), gizli değişkenlerin normal dağılım göstermediği durumlarda doğrusal olmayan etkilerin tahmini için Bayesci yaklaşımı diğer yaklaşımlarla birlikte ele almışlardır. Çalışmada Bayesci yaklaşımın, parametre tahminlerinin tarafsızlığı, Tip I hata oranları ve gizli tahmin değişkenleri normal olmayan bir dağılım izlediğinde güç açısından doğrusal olmayan YEM'e yönelik geleneksel yaklaşımlardan daha iyi performans gösterdiğini belirleyebilmek için LMS, QML ve ExUC yaklaşımları ile birlikte bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar (normal olmama durumu altında), LMS ve QML ikinci dereceden etkilerin yanlı tahminlerini verirken ikinci dereceden etkiler yaklaşık olarak %19-20 oranında fazla tahmin edilmiştir. Her iki yaklaşımda etkileşim etkisi ve standart hatalar için yanlılık bulunmamış olup ExUC yaklaşımında ise etkileşim etkisi biraz fazla tahmin edilirken kuadratik ve etkileşim etkilerinin standart hataları daha az tanımlanmıştır. Önerilen Bayesci yaklaşımda doğrusal olmayan etkilerde veya bunların standart hata tahminlerinde herhangi bir yanlılık görülmemiştir. Ayrıca tarafsız doğrusal olmayan etkileri tespit etmek için de en yüksek gücü göstermiştir. Önerilen Bayesci yaklaşım için simülasyon çalışmasından sonra deneysel çalışma iş ve stres araştırmasından yararlanarak (Diestel ve Schmidt 2009, tarafından analiz edilen bir veri setine N= 574) diğer yaklaşımlarla karşılaştırılarak yapılmıştır. Önerileri, Bayesci yaklaşımla analiz edilen bir model için gizli tahmin edicilerin (McLachlan & Peel, 2000) normal olmayan dağılımına yaklaşmak için gizli karışım dağılımlarından varsayma olarak ele alınması ve ayrıca bilgilendirici önselleri elde etmek için ise ExUC yaklaşımının (Kelava & Brandt, 2009) kullanılması yönünde olmuştur (Kelava ve Nagengast, 2012: 717- 742).

Bu karşılaştırma çalışmalarına ek olarak, iki aşamalı en küçük kareler- 2SLS (Bollen ve Paxton, 1998), kısıtlı ve kısıtsız ürün göstergesi yaklaşımları/indikatör üretme yaklaşımları (Jöreskog ve Yang, 1996; Marsh vd., 2004), moment temelli yaklaşım (Wall ve Amemiya, 2003) ve LMS yöntemi (Klein ve Moosbrugger, 2000) ortak değişkenler içermeyen bir model bağlamında geliştirilmiştir. Bu nedenle daha karmaşık doğrusal olmayan YEM'i yukarıda bahsedilen yöntemler ile gerçekleştirmek mümkün değildir (Lee vd., 2007: 409).

Karşılaştırma çalışmalarının sonuçları doğrusal olmayan YEM için Bayesci yaklaşımın diğer yaklaşımlardan daha güvenilir olduğuna işaret eder iken birçok araştırmacı da (Arminger ve Muthen, 1998; Zhu ve Lee, 1999; Lee ve Zhu, 2000; Lee ve Song, 2003) Bayesci yaklaşımın kullanılmasını ayrıca önermişlerdir (Ma, 2006: 15; Song ve Lee, 2006: 338). Bunda Bayesci yaklaşımın temel bazı özelliklerinin büyük katkı sağladığı söylenebilir.

Bayesci yaklaşım, bilimsel düşünce biçiminden dolayı metodolojik olarak farklılık göstermektedir. Bilindiği üzere istatistik biliminin gelişimi sürecinde iki farklı düşünce vardır. Bunlar Klasik (Sıklıkçı) yaklaşım ile Bayesci yaklaşımdır. İstatistik biliminde Klasik yaklaşım hızlı bir ilerleme kaydetmiş olup alanda hâkimiyeti daha fazladır. Bu durumun nedeni, Bayesci yaklaşımın ortaya çıkmasını sağlayan ilgili makalenin (*An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances*) Klasik yaklaşımın öncülleri tarafından oldukça ağır biçimde uzun bir süre eleştirilmesidir. Eleştiriler YEM'in birinci kuşak çalışmalarına gelmeden önce Bayesci yaklaşımın aslında makul ve kullanılabilir olduğu seviyesindedir. Birinci ve ikinci nesil YEM çalışmalarına paralel olarak karmaşık istatistiksel modellere Bayesci yöntemler eklenmiştir (Ekici, 2005: 2- 4; Kaplan ve Depaoli, 2012: 650).

Bayesci yaklaşımı Klasik yaklaşımdan farklı kılan belirsizliğe karşı olan tutumudur. Klasik yaklaşımda parametreler sabit karakterli olup veriler bir olasılık dağılımı ile ifade edilmekte ve bu nedenle tahminleme işlemi sadece gözlemlenen veriler ile sağlanmaktadır. Bayesci yaklaşımda parametreler olasılık dağılımlarına sahip rassal değişkenlerdir. Bu nedenle Bayesci yaklaşımda parametre tahmini yapmak için öncelikle ilgili parametre hakkında önsel bilgi yani önsel olasılık dağılımı belirlenmelidir. Gözlem verileri ve önsel bilginin birleşimi ile sonsal dağılımdan parametre hakkında sonuca ulaşılmaktadır (Gill, 2015: 6; Lynch, 2007: 50).

Bayesci düşünce biçiminin temel farklılıkları böyle iken araştırmacıları Bayesci yaklaşıma yönelten dört temel motivasyon kaynağı mevcuttur. Bu motivasyon kaynakları ise şunlardır (Muthen ve Asparouhov, 2012: 314):

1. Parametre tahminleri ve model uyumu hakkında daha fazla bilgi edinebilinir.
2. Büyük örneklem teorisine ihtiyaç duymadan küçük hacimli örneklemlerde daha iyi performans elde edilir.
3. Uygulamalarda daha az talebin/şartın olması.
4. Yeni tür modellerin analizinin yapılabilinir olması.

Birinci motivasyon kaynağı, parametre tahminlerinin normal dağılıma sahip olmaması ile ilgilidir. Örneğin aracılık analizinde dolaylı etki (axb) gibi. Klasik istatistikte sıkça kullanılan ML, parametre tahminleri ve onların standart hatasını vermektedir. Varsayımı ise asimptotik teori çerçevesinde parametre tahminin dağılımının normal olduğudur. Bu durumun aksine Bayes, büyük örneklem teorisine dayanmaz ve normal olduğunu varsaymadan sonsal dağılım olarak adlandırılan tüm dağılımları sağlamaktadır. ML güven aralığı tahminini $\mp 1{,}96 \times SE$ simetrik dağılım varsayar, Bayes'de ise güven aralığı yerine güvenirlik aralığı (credibility interval) kullanımı söz konusu olup güçlü bir biçimde çarpık dağılıma izin veren sonsalların yüzdeliklerine dayanır. Model uyumunda Bayesci istatistik DIC, Bayes Faktörü ve ppp (Posterior Predictive p Value) gibi oldukça önemli araçları ile oldukça esnek bir biçimde kullanılabilir.

Yalnız burada kısa ama öz bir bilgi Bayesci yaklaşımın hipotez testlerini, hipotezlere karşılık gelen modeller olarak ele almasıyla her bir modelin diğeri üzerinde kanıtına dayanan (Bayes Faktörü) bir yaklaşım yürüttüğü belirtilmelidir. Bu durum klasik yaklaşımda sıfır hipotezinin reddi ile diğer hipotezin doğrudan, elde kanıt olmadan, kabul edilmesi gibi bir yanılgıdan kaçınılmasını sağlamaktadır (Lee, 2007: 111-112).

İkinci motivasyon kaynağı, Bayesci yaklaşımın küçük örneklem hacimlerinde iyi performans göstermesi ile ilgilidir. Bu duruma örnek, Heywood vakalarına yatkın faktör analizi yapıldığında ya da çok düzeyli modellerden az sayıda küme analiz edildiğinde iyi bir önsel seçimi ile gözlemlenir.

Üçüncü motivasyon kaynağı, ML yaklaşımı yerine Bayesci yaklaşımı kullanmada tereddüt eden uygulamalı araştırmacılar ile ilgilidir. Birçok modelin ML ile analizi oldukça külfetli ya da imkânsızdır. Bu konuyla ilgili kısa bir açıklama şu şekilde verebilir: Küçük örnek hacmine sahip modellerde asimptotik tahmin yöntemlerinin kullanılması uygun değildir. Çünkü parametre (standartlaştırılmış) tahminlerinin dağılımı bilinmemekte ve bu yüzden asimptotik teoriye dayalı formüller kullanılarak iyi tahminler elde edilememektedir. Ayrıca küçük örnek boyutlu modellerde ML ile yapılan tahminlemede yakınsamanın olmaması, uygun olmayan çözümler (örn. negatif varyans tahmini) ve yanlı model uyum indeksleri gibi problemlerle karşılaşılabilinir. Bu durum için iyi bir strateji ML tahmincisinin asimptotik örnekleme dağılımı yerine parametreler üzerinden sonsal dağılımın kullanılmasıdır (Oezchowski, 2014: 854; Scheines vd., 1999: 39). Lee ve Song (2004), normal dağılımlı küçük örneklemlerde Bayesci yaklaşımın kullanılabilir olduğunu fakat ML'nin ise kullanılamaz olduğu sonucunu elde etmişlerdir (Lee ve Song, 2004: 653).

Dördüncü motivasyon kaynağı için ise çok sayıda parametreye sahip ya da ML'nin doğal bir yaklaşım sergileyemediği modeller örnek olarak verilebilir. Bayesci yaklaşımda tahminleme daha iyi sonuç elde edilmesini sağlayan önsel bilgilerin kullanımına dayanmaktadır. Bu sayede kovaryans tabanlı YEM ile çözülmesi zor olan *az tanımlanmış* modeller için parametreler hakkındaki önsel bilgiler sayesinde çözüm sağlanmaktadır. Ek olarak kovaryans tabanlı YEM kullanılarak çözümü mümkün olmayan Heywood vakalarına (örn. negatif varyans tahmini) karşı da çözüm elde edilmektedir (Harindranath ve Jacob, 2018: 1255).

Yukarıda belirtilen motivasyon kaynaklarına ek olarak Bayesci yaklaşım özetle küçük örneklem büyüklüğüne (Ansari ve Jedidi 2000; Ansari, Jedidi ve Dube 2002; Ansari, Jedidi ve Jagpal 2000; Dunson 2000; Scheines, Hoijtink ve Boomsma 1999; Lee ve Song 2004) sahip model tahminleri, tanımlanamayan modeller, kategorik çıktıları olan modeller ve karmaşık modellerin analizi gibi özel durumlarda kullanılabilir. Ayrıca, farklı veri yapılarına sahip modeller, çok düzeyli veriler (Ansari ve Jedidi 2000), doğrusal olmayan modeller (Arminger ve Muthén 1998), eksik verilere sahip modeller (Song ve Lee 2002), boylamsal veriler (Dunson 2003), yarı paremetrik modeller (Guo vd. 2012), sürekli ve ikili verilere sahip çok düzeyli modeller (Depaoli ve Clifton 2015), ortak değişkenli modeller (Lee vd. 2007; Song ve Lee 2006) ve aracı model (Yuan ve MacKinnon 2009; Chen vd. 2014) analizlerinde de faydalı olmuştur (Lee, 2007: 68- 69; Harindranath ve Jacob, 2018: 1255).

4.Bayesci Doğrusal Olmayan Yapısal Eşitlik Modeli

Bu bölümde Bayesci yaklaşımın daha iyi anlaşılır olması için yaklaşımın nasıl çalıştığı, sonsal dağılımda tahminleme, θ'daki elemanların önsel dağılımları ve MCMC yöntemi ile sonsal dağılım analizine yer verilmiştir. İlk olarak yaklaşımın nasıl çalıştığı verilmeye çalışılmıştır.

4.1 Bayesci Tahminde Temel Kavramlar

Bayesci yaklaşım, istatistik literatüründe çok çeşitli modelleri analiz etmek için çekici bir yaklaşım olarak bilinmektedir (Berger, 1985; Congdon, 2003). Doğrusal olmayan YEM için bu yaklaşım şu şekilde tasvir edebilir: Örneğin önerilen doğrusal olmayan model M, Y gözlenen veri seti $(y_1, \dots, y_n)$, M modeli altında bilinmeyen bağımsız parametreleri içeren vektör θ iken, Bayesci olmayan yaklaşımda, örneğin ML yaklaşımında θ rassal değildir. Bayesci bir yaklaşımda θ, önsel dağılım olarak adlandırılan bir dağılımla rassal olarak kabul edilmektedir. Ve ayrıca önsel yoğunluk fonksiyonu $p(\theta)$ ile ilişkilidir. Bayesci çıkarım, gözlenen veri seti Y ile θ'nın önsel dağılımına dayanmaktadır. Model M'deki θ parametre vektörü rastgele olduğundan, gözlemlenen Y verileri ile ortak bir dağılıma sahiptir. M modeli altında bu ortak dağılımın yoğunluk fonksiyonunun olasılığı $p(Y,\theta)$ iken, gözlenen veri seti Y altında θ'nın davranışı tam olarak Y verildiğinde θ'nın koşullu dağılımı tarafından tanımlanmaktadır. Bu koşullu dağılım θ'nın "sonsal dağılımı" olarak adlandırılmaktadır. Sonsal yoğunluk fonksiyonu olarak da adlandırılan sonsal dağılımın yoğunluk fonksiyonu $p(\theta|Y)$ iken, modelin Bayesci analizinde, sonsal dağılım ya da sonsal yoğunluk önemli bir rol oynamaktadır. Olasılıkta iyi bilinen tanımlama üzerine herhangi bir A ve B olayı için $p(A\ ve\ B) = p(A)p(B|A) = p(B)p(A|B)$; bu duruma benzer biçimde de aşağıdaki oransallık yazılabilmektedir:

$$p(\theta|Y) \propto p(Y|\theta).p(\theta) \tag{14}$$

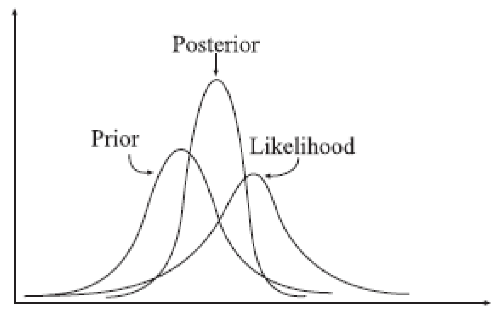
$$p(\theta|Y) \propto L(\theta).p(\theta) \tag{15}$$

$$Sonsal\ Dağılım \propto Benzerlik\ (Olabilirlik).Önsel\ Dağılım$$

$$log\ p(\theta|Y) \propto log\ p(Y|\theta) + log\ p(\theta) \tag{16}$$

Şekil 2

Önsel, Olabilirlik ve Sonsal Dağılım Gösterimi



Eşitlik (16)'da geçen $log\ p(Y|\theta)$ olabilirlik fonksiyonudur. Çünkü θ parametre vektörünün koşullu dağılımı altında $y_1, \dots, y_n$'nın olasılık yoğunluğudur. Eşitlikten görülebilecek önemli bir husus şudur: Sonsal yoğunluk fonksiyonunun, sırasıyla log- olabilirlik fonksiyonu ve önsel yoğunluk fonksiyonunu logaritmaları ile *örnek bilgi* ile *önsel bilgiyi* birleştiriyor olmasıdır. Ayrıca görüleceği üzere $log\ p(Y|\theta)$ örnek hacmine bağlıdır fakat $log\ p(\theta)$ ise değildir. Örneklem hacmi keyfi olarak büyütüldüğünde $log\ p(Y|\theta)$'de aynı zamanda büyüyecektir bu durumda $log\ p(\theta)$ baskılanacaktır. Böylelikle θ'nın önsel dağılımı tahmin işleminde daha az rol oynayacaktır. Ve ayrıca log- sonsal yoğunluk fonksiyonu $log\ p(\theta|Y)$, log-olabilirlik fonksiyonu $log\ p(Y|\theta)$'ya yakınlaşacaktır. Bu nedenle, "*Bayesci yaklaşım ile ML yaklaşımları asimptotik olarak eşdeğerdir ve Bayesci tahminler ML tahminlerinde olduğu gibi aynı optimal özelliklere sahiptir. Örnek büyüklükleri küçük veya orta büyüklükte olduğunda, θ'nın önsel dağılımı Bayesci yaklaşımda önemli bir rol oynar*". Bu nedenle, örnek boyutlarının sonlu olduğu önemli araştırma problemlerinde, model veya parametre vektörü θ hakkındaki önsel bilgiler, θ'nın önsel dağılımı yoluyla daha iyi sonuçlar elde etmek için Bayes analizine dâhil edilmektedir. Bu sonuç neticesinde önsel yoğunluğun seçimi, Bayes analizinde önemli bir konu olarak yer almaktadır (Kaplan ve Depaoli, 2012: 651; Lee vd., 2007: 409- 410).

4.2 Sonsal Dağılımın Analizi

θ'nın bir tahmini olarak sonsal dağılımdan mod ya da ortalama kullanmak mantıklıdır. Genellikle θ'nın Bayesci tahmini, θ'nın sonsal dağılımının ortalaması olarak düşünülmektedir. Basit bir YEM için sonsal ortalama direkt integralleme ile elde edilebilir. Fakat doğrusal olmayan terimleri barındıran modellerin karmaşıklığından dolayı ilgili integralin kapalı formu yoktur. Bu sorunu çözmek için sonsal dağılımdan yeterince büyük sayıda gözlemin simülasyonunu öneren ve istatistikte yaygın olarak kullanılan bir stratejinin benimsenmesi uygundur. $\{\theta^{(t)}, t = 1, \ldots, T\}$ ile çeşitli Bayesci istatistik bu simüle edilmiş örnekten elde edilebilir. Örneğin θ'nın Bayesci tahminini (ortalamasını ve standart hatasını) sırasıyla simüle edilen gözlemlerin örnek ortalamasından ve örnek kovaryans matrisinden elde edilebilir. Burada, asıl sorun, bilinmeyen parametrelerin sonsal dağılımından gözlemleri simüle etmek için uygulanabilir ve verimli yöntemler geliştirmektir. Yöntemler açısından çözülmesi gereken iki ana konu vardır (Lee vd., 2007: 411).

İlk konu, bilinmeyen parametrelerin sonsal dağılımı ile ilgilidir. Bunun sebebi θ'nın Bayesci tahminini, θ'nın sonsal dağılımının ortalaması olarak ele alınmasından kaynaklanmaktadır. Bağımsız gizli değişkenlerin (ξ_i) doğrusal olmayan terimlerinin dağılımları normal olmadığından, bağımlı gizli değişken η'nın da dağılımı normal değildir. Dolayısıyla y_i'deki gözlenen değişkenlerin dağılımı da normal değildir. Sonuç olarak olabilirlik fonksiyonu ve sonsal dağılım karmaşık olabilir. Sorun, gizli değişkenlerin doğrusal olmayan terimleri tarafından tesir edilmiş/uyarılmış normal olmayan dağılımdan kaynaklanmaktadır. Eğer $\omega_i = (\eta_i, \xi_i')'$ rassal gizli değişkenleri gözlenen değişkenler olarak ele alınırsa bu sorun ortadan kalkar. Bu düşünce (Tanner ve Wong 1987) ile $\Omega = \{\omega_i, i = 1, \ldots, n\}$'daki gizli değişkenlere "*farazi rassal kayıp veri*" olarak davranılabilir. Eğer ki belirtilen durum söz konusu olursa şimdiki sorun da Y gözlenen verileri verildiğinde θ ve Ω'nın ortak sonsal dağılımından ortalamayı elde etmek olur. Halen $p(\theta, \Omega|Y)$ karmaşık olduğundan, ortalaması da analitik forma sahip değildir. İstatistiksel hesaplamanın son gelişmelerindeki fikirlerden esinlenerek, büyük bir gözlem örneğini simüle ederek bu sorun çözülebilir; $p(\theta, \Omega|Y)$'den $\{(\theta^t, \Omega^t), t = 1, \ldots, T\}$. Sonrasında ise θ ve Ω'nın Bayesci tahminini, karşılık gelen örneklem ortalamasından elde edilir. Bahsedilen bu görüş, $p(\theta|\text{Y}, \Omega)$ ve $p(\Omega|Y, \theta)$ tam koşullu dağılımlarından yinelemeli olarak gözlemler çeken Gibbs örnekleyicisi (Geman ve Geman, 1984) adı ile iyi bilinen bir MCMC yöntemi ile tamamlanır. Y ve θ verildiğinde Ω'nın koşullu dağılımı $p(\Omega|Y, \theta)$, modelin tanımlarına ve gizli değişkenlerin dağılımsal varsayımına dayanarak türetilebilir (Lee ve Song, 2003: 27- 47). Bu nedenle Y ve Ω verildiğinde koşullu dağılım $p(\theta|\text{Y}, \Omega)$, $p(\theta|Y)$'den daha kolay olup aynı zamanda türetilebilir. Eşitlik (16)'ya benzer bir ilgili sonuçtan, koşullu dağılımın $p(\theta|\text{Y}, \Omega)$, önsel dağılım ile önsel yoğunluk $p(\theta)$'ya bağlı olduğu görülebilir. Bu nedenle θ için uygun önsel dağılım seçimi, Bayesci yaklaşımda diğer önemli konudur (Lee vd., 2007: 411; Song ve Lee, 2012: 138).

*4.3 **$\boldsymbol{\theta}$**'daki Parametrelerin Önsel Dağılımları*

Bayesci çıkarımın ayırt edici özelliği, model parametreleri için önsel dağılımın belirlenmesidir. *Buradaki zorluk model parametreleri hakkında önsel dağılımları seçmek istendiğinde ortaya çıkmaktadır*. Veriler elde edilmeden önce ne kadar bilgiye sahip olunduğuna ve bu bilginin ne kadar doğru olduğuna bağlı olarak iki tür önsel ayrımı yapılmaktadır (Kaplan ve Depaoli, 2012: 652). Bunlar bilgilendirici ve bilgilendirici olmayan önsel dağılımlardır.

<u>Bilgilendirici Olmayan Önsel Dağılımlar</u>: Parametre hakkında yeterli bilgiye sahip olunmadığı ya da çok az bilginin olduğu durumlarda kullanılan bu önsel dağılımlar bilgilendirici olmayan önsel dağılımlar olarak adlandırılır. Bilgilendirici olmayan bir önsel bilgi makul bir değer aralığına sahip tek bir dağılım veya büyük bir varyansa sahip bir dağılım olabilir. Bu dağılımlar sonsal tahmin üzerinde daha az etkiye sahip olma eğiliminde olup Bayesci çıkarım daha çok gözlemlenen verilerden etkilenirler (Jia, 2016: 24).

<u>Bilgilendirici Önsel Dağılımlar</u>: Bu dağılımlar bir model parametresinin dağılımının şekli ve ölçeği hakkında daha önceden yapılan çalışmalar, uzman görüşleri gibi benzer öznel bilgilerden oluşan dağılımlardır. İlgili parametre hakkında bilgi sahibi olunması olabilirlik fonksiyonu tarafından baskılanmamayı sağlarken istatistiksel çıkarımda önemli bir rol almaktadır. Bu yüzden yapılan çalışmalarda bilgilendirici önsel dağılımların seçimi oldukça önemlidir. Aksi takdirde sonuçlar yanlı olabilir (Ando, 2010: 27- 28).

θ için bilgilendirici bir önsel dağılımın seçiminde önemli hususlar vardır. Bunlar, $p(\theta|\text{Y}, \Omega)$ koşullu dağılımının çok karmaşık olmaması ve gözlemleri simüle etmek için uygun biçime sahip olmasıdır. Bu hususlar arzu edilen hususlardır. Lindley ve Smith'in (1972) önerisine ve çoğu Bayesci YEM (Arminger ve Muthén 1998; Fox ve Glas 2001; Lee ve Song 2003b; Song vd. 2007; Lee 2007) analizine dayanarak kullanılmak istenen önseller, eşlenik önsellerdir. Eşlenik önsel dağılımların esnek oldukları ve çok çeşitli durumlara uygulanabildikleri çoğu araştırmada görülmektedir. Eşlenik önsel dağılımlar kullanıldığında sonsal dağılım önsel dağılımla aynı parametrik formu takip eder. Bu nedenle koşullu dağılımların türetilmesi için uygundur (Lee vd., 2007: 412- 413; Song ve Lee, 2012: 37- 38):

Çoğu Bayesci YEM analizlerinin önerilerine dayanarak, ölçüm modelindeki parametreler için aşağıdaki eşlenik önsel dağılımların seçimi uygundur. $k = 1, \ldots, p$ için Λ_k, Λ'nın k. satırı ve Ψ_{ek}, Ψ_e'nın k. diyagonal/köşegen elemanı olmak üzere; Ψ_{ek}'nın önsel dağılımı $\alpha_{0ek}, \beta_{0ek}$ parametreleri ile ters gamma dağılımı Λ_k ve α' nın önsel dağılımları ise normal dağılım seçilirse, eşlenik önsel dağılımlar aşağıdaki gibidir:

$\Psi_{ek} \sim Ters\ Gamma\ (\alpha_{0ek}, \beta_{0ek})$ veya eşdeğer olarak,

$\Psi_{ek}^{-1} \sim Gamma\ (\alpha_{0ek}^{*}, \beta_{0ek}^{*})$ (17)

$\alpha \sim N[a_0, \Sigma_0]$, $\quad \Lambda_k|\Psi_{ek} \sim N[\Lambda_{0k}, \Psi_{ek} H_{oek}]$

Eşitlik (17)'de $a_0, \Sigma_0, \alpha_{0ek}(\alpha_{0ek}^{*}), \beta_{0ek}(\beta_{0ek}^{*}), \Lambda_{0k}\ ve\ H_{oek}$ parametreleri, önsel dağılımın parametreleridir. Ve hiper parametreler olarak adlandırılırlar. Burada not edilmesi gereken bir husus vardır. O da ölçüm modelinde kullanılan sabit α ile ters gamma dağılımındaki α_{0ek}'nın hiçbir ilişkisinin olmamasıdır. Dahası $k \neq h$ olmak üzere (Ψ_{ek}, Λ_k) ve (Ψ_{eh}, Λ_h)'nın önsel dağılımları doğal olarak birbirinden bağımsızdır. $\Pi = (\beta, \Gamma)$ olduğu varsayılırsa, yapısal modeldeki parametreler için benzer eşlenik önsel dağılımları aşağıdaki gibi seçebilir:

$\Psi_\zeta \sim Ters\ Gamma\ \left(\alpha_{0\zeta}, \beta_{0\zeta}\right)$ veya eşdeğer olarak,

$\Psi_\zeta^{-1} \sim Gamma\ (\alpha_{0\zeta}^{*}, \beta_{0\zeta}^{*})$,

$\Pi \sim N\left[\Pi_0, \Psi_\zeta H_{o\zeta}\right]$, $\quad \Phi^{-1} \sim W_{q-1}(R_0, \rho_0)$ eşdeğer olarak (18)

$\Phi \sim Ters\ W_{q-1}({R_0}^{*}, {\rho_0}^{*})$

Buradaki $\alpha_{0\zeta}\left(\alpha_{0\zeta}^{*}\right), \beta_{0\zeta}\left(\beta_{0\zeta}^{*}\right), \Pi_0, H_{o\zeta}, R_0({R_0}^{*})ve\ \rho_0({\rho_0}^{*})$ parametreler hiper parametrelerdir. W_{q-1} ise (q-1) boyutlu Wishart dağılımıdır. Bu dağılım, pozitif tanımlı matris R_0 ve serbestlik derecesi ρ_0 ile ilişkilidir. Ayrıca $Ters\ W_{q-1}({R_0}^{*}, {\rho_0}^{*})$ dağılımı ters Wishart dağılımına karşılık gelmektedir. Ψ_ζ^{-1}'nın önsel dağılımının çok değişkenli bir uzantısı olarak $\Phi^{-1} \sim W_{q-1}(R_0, \rho_0)$ yorumlanabilir.

Uygulamada, eşlenik önsel dağılımların hiper parametreleri genellikle önceden atanmış değerlere sabitlenmektedir. Bu önceden atanmış değerler elde edilebilen önsel bilgileri temsil etmektedir. Genellikle parametre hakkında iyi önsel bilgi var ise, karşılık gelen önsel dağılımda küçük varyansı almak arzu edilir; aksi takdirde büyük varyans tercih edilmektedir. Örneğin, ölçüm modelindeki

$\alpha \sim N[a_0, \Sigma_0]$'yı ele alalım. Eğer ki α'nın önceden atanmış hiper parametre değeri a_0'a yakın olduğuna güvenilir ise bu durumda Σ_0, küçük bir matris olarak ele alınabilir. α_{0ek} ve β_{0ek}'nın seçimi ölçüm modelindeki Ψ_{ek} parametresinin aynı genel mantığına ve niteliğine dayanmaktadır. İlk önce şu durum ele alınmalıdır: Ölçüm hatalarının dağılımı $\epsilon_{ik} \sim N[0, \Psi_{\epsilon k}]$. Ortalama değer o' daki ϵ_{ik}'nın varyansının küçük olduğuna inanılıyor ise (yani eğer y_{ik} için $\alpha_k + \Lambda_k \omega_i$'nin iyi bir tahmini ise), o zaman küçük bir ortalama değere ve küçük bir varyansa sahip olan $\Psi_{\epsilon k}$'nın önsel dağılımını seçmek daha iyidir. Bu ters gamma dağılımındaki α_{0ek} ve β_{0ek} hiper parametrelerin seçimi için bazı gerekçeler vermektedir. Ters gamma dağılımı için ortalamanın $\beta_{0\epsilon k}/(\alpha_{0\epsilon k} - 1)$'e eşit olduğu ve varyansın da $\beta_{0\epsilon k}^2/\{(\alpha_{0\epsilon k} - 1)^2(\alpha_{0\epsilon k} - 2)\}$'ye eşit olduğu not edilmelidir. Dolayısıyla ölçüm eşitliğinde güvenilen bir durum için $\alpha_{0\epsilon k} = 9$ ve $\beta_{0\epsilon k} = 4$ olarak alınabilir. Bu seçim altında, $\Psi_{ek} \sim Ters\ Gamma\ (\alpha_{0ek}, \beta_{0ek})$ olduğu hatırlanırsa Ψ_{ek}'nın ortalaması 4/8= 0.5, varyans ise $4^2/(9 - 1)^2(9 - 2) =$ 1/28 olur. Φ^{-1}'in önsel dağılımında R_0, ρ_0 parametrelerin seçimine sıra geldiğinden Muirhead (1982: 97): Φ'nın ortalaması $R_0^{-1}/\{\rho_0 - (q - 1) - 1\}$'dır. Φ' nin R_0^{-1}'e yakın olduğuna güvenilir ise ρ_0' ın seçimi ise şu şekilde olmaktadır: $\rho_0 = (q - 1) + 2$. İyi olmayan önsel bilgilerin olduğu durumlar için ρ_0'ın diğer başka değerleri düşünebilir.

Eğer doğru önsel bilgiler mevcut değilse ve örnek hacmi küçük ise bilgilendirici olmayan önseller kullanılabilir. Örnek hacmi büyükse bazı verilere bağlı önsel bilgi girişlerinin kullanımı da düşünebilir. Örneğin, verilerin bir kısmı bilgilendirici olmayan önsel dağılımlar ile Bayesci analizde kullanılır. Burada bahsedilen verilerin üçte biri ya da daha azının kullanılmasıdır. Verinin diğer kalan kısmı için önsel bilgi elde edilmiş olup diğer kalan kısımda yapılacak analiz için bilgilendirici önseller kullanılır. Genel olarak Bayesci analiz sonuçları elde edildikten sonra bir duyarlılık analizi yapılması arzu edilir. Bu duyarlılık analizi aslında önsel bilgi duyarlılığıdır. Bu yüzden çalışma tekrar farklı ve bir kısmı değiştirilmiş önsel bilgiler ile yeniden analiz edilebilir.

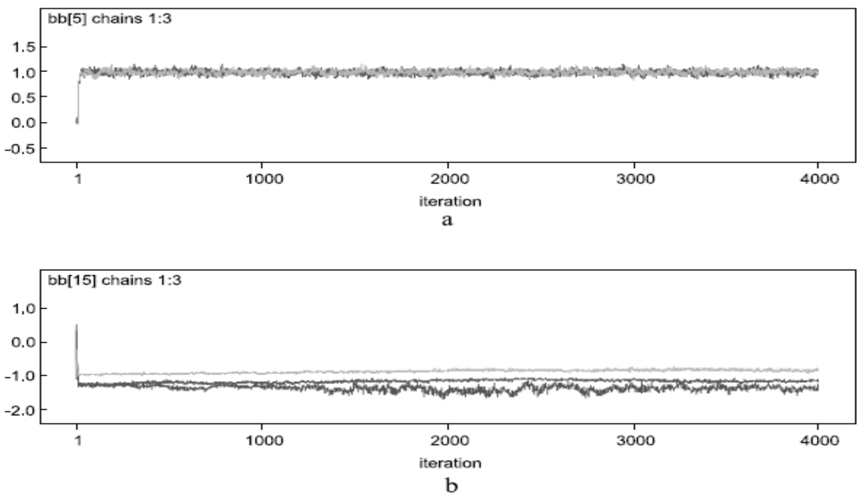
4.4 MCMC Yöntemi ile Sonsal Dağılımın Analizi

Mevcut Bayesci analizler için problem, Gibbs örnekleyicisi ile $p(\theta|\mathrm{Y}, \Omega)$ ve $p(\Omega|Y, \theta)$'den gözlemlerin simülasyonudur. θ'daki elemanların eşlenik önsel dağılımları altında, $p(\theta|\mathrm{Y}, \Omega)$'daki θ'nın bileşenlerine (örn. $\alpha, \Lambda_k, \Psi_{\epsilon k}$ vb.) karşılık gelen koşullu dağılımların yaygın bir biçimde Wishart, gamma ve normal dağılıma sahip oldukları (Lee ve Song, 2003) gösterilebilir. Gözlemler bu dağılımlardan oldukça hızlı bir biçimde simüle edilebilirler. $p(\theta|\mathrm{Y}, \Omega)$' ya karşılık gelen koşullu dağılımlar standart değildir ve Ω' nın etkili simülasyonu için Metropolis-Hasting (MH) algoritmasını uygulamak gerekmektedir. Temelde Gibbs örnekleyicisi bir başlangıç değeri (θ^0, Ω^0) ile başlar ve simüle eder $(\theta^1, \Omega^1), \dots, (\theta^j, \Omega^j)$. Hafif düzenli şartlar altında, yeterince büyük sayıda ilk yinelemeden (örneğin j) sonra simüle edilen bir gözlemin Y verildiğinde (θ, Ω)'nın ortak sonsal dağılımının bir gözlemi olarak kabul edildiği (Geman, Geman 1984) gösterilmiştir (Lee vd., 2007: 414- 417):

Algoritmanın yakınsaması veya j sayısının seçimi, farklı başlangıç değerlerine sahip simüle edilmiş gözlem dizilerinin (genellikle üç) çizimlerinin incelenmesiyle belirlenebilir. Yakınsamada, bu gözlem dizileri birbirine iyice karıştırılmalıdır. Yakınsamayı izlemek için, çok uzun bir gözlem dizisi yerine birkaç gözlem dizisi kullanmak uygun olabilir. Algoritmanın j. yinelemeden sonra yakınsamaya ulaştığını varsayılır ise, daha sonra erken yinelemelerde elde edilen gözlemler (yanma yinelemeleri/yakma periyodu olarak adlandırılır) genellikle atılır, çünkü bunlar ortak sonsal dağılıma ait değildir. Yeterince büyük sayıda simüle edilmiş gözlem, örneğin, j. yinelemeden sonra istatistiksel çıkarım yapmak için toplanır. Yinelemeli simülasyon çizimleriyle ilgili küçük bir sorun, bunların dizi içi korelasyon içermesidir. Aşağıda yakınsamanın makul görüldüğü dizi ile yakınsamaya ulaşmamış dizi için zincirlerin örnek iz grafikleri verilmiştir.

Şekil 3

Zincirlerin Örnek İz Grafikleri: (a): Yakınsamanın Makul Görüldüğü; (b): Yakınsamanın Sağlanmadığı



Daha az ilişkili/korelasyonlu örnek elde etmek için, gözlemler bazı k aralığı için yineleme indeksi $t = J + k, J + 2k, \dots, J + Tk$ olan döngülerde toplanabilir. Ancak çoğu pratik uygulamada $k = 1$ parametre tahminleri ve standart hata tahminleri elde etmek ve güvenirlik aralıklarının (credibility interval) oluşturulması gibi birçok istatistiksel analiz için yeterlidir. Örneğin WinBUGS yazılımında, k'nin varsayılan değeri 1'dir.

Model için istatistiksel çıkarım, j ilk yakma yinelemelerinden sonra toplanan simüle edilmiş bir gözlem örneği temelinde gerçekleştirilebilir, yani Y verildiğinde (θ, Ω)'nın ortak sonsal dağılımından Gibbs örnekleyicisi ile $\{(\theta^{(t)}, \Omega^{(t)}): t = 1, \dots, T\}$ simüle edilir. θ'nın Bayesci tahmini simüle edilen gözlemlerin aşağıdaki örnek ortalamasından elde edilir:

$$\hat{\theta} = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} \theta^t \qquad (19)$$

$\hat{\theta}$' nın kovaryans matrisi için analitik form türetmek zordur. YEM için neredeyse tüm Bayesci analizlerde θ'nın sonsal dağılımındaki kovaryans matrisinin aşağıdaki tahmini (yani θ'nın sonsal kovaryans matrisi) $\hat{\theta}$'nın kovaryans matrisini tahmin etmek için kullanılır:

$$\widehat{Var}\,(\theta|Y) = (T-1)^{-1}\sum_{t=1}^{T}\left(\theta^{(t)}-\hat{\theta}\right)\left(\theta^{(t)}-\hat{\theta}\right)' \qquad (20)$$

Bayesci YEM analizinde, önceki birçok çalışmada olduğu gibi, Bayes tahmincisi $\hat{\theta}$'nın "Tahmini Standart Hatası-Estimated Standard Eror (EST-SD)"nı $\widehat{Var}\,(\theta|Y)$'nin köşegen elemanlarının karekökünden elde eder. Bayes tahminlerinin değişkenliğini, tahmin edilen standart hata yansıtabilir. Gerekli olan toplam simüle gözlem sayısı T, istatistiksel analiz için sonsal dağılımın şekline bağlıdır. Büyük bir T verildiğinde, $\hat{\theta}$ dağılımı, nispeten küçük bir n ile normal bir dağılıma yakındır. Bu nedenle Bayes yaklaşımı, daha küçük örneklem boyutlarında bile güvenilir sonuçlar verebilir.

Bayes tahminlerine ve bu tahminlerin standart hatalarına ek olarak $\widehat{\omega}_i$'nin Bayes tahmini, $\left\{\left(\Omega^{(t)}\right), t=1,\ldots,T\right\}$'den aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\widehat{\omega}_i = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\omega_i^{(t)} \qquad (21)$$

Burada $\widehat{\omega}_i$, $\Omega^{(t)}$'nin i. sütunudur. Bu yöntem regresyon yöntemi ve Bartlett metodunun aksine gizli değişkenlerin doğrudan tahminini verir. Büyük örneklerde $\widehat{\omega}_i$'nin dağılımı $N[\omega_i, Var\,(\widehat{\omega}_i)]$ dır. Gizli değişkenlerin tahminlerinin örnekleri $\{\widehat{\omega}_i,\ i=1,2,\ldots,n\}$, kullanılarak daha fazla istatistiksel çıkarım yapmak mümkündür. Örneğin kalıntıların/artıkların tahminleri elde edilebilir. Bu durum neticesinde model uyumu kalıntılar ve gizli değişkenlerin grafikleri ile yorumlanabilir.

5. Sonuç ve Öneriler

YEM, gizli değişkenler arasındaki doğrusal ilişkileri modelleyen bir metot olarak bu temel üzerine ortaya çıkmıştır. YEM adı için iyi bilinen LISREL programı da "doğrusal yapısal ilişkiler" anlamına gelmektedir. Ancak çoğu durumda bu doğrusallık sınırlaması, ilgilenilen kavramları açıklamak için yeterince esnek ve elverişli değildir. YEM'in sıkça kullanıldığı bilim dallarında gizli değişken kavramı, ilişkilerin türü ve boyutu oldukça önemlidir. Bununla birlikte uygulamalı problemlerde ilgili araştırma soruları doğrusal olmayan ilişkiler ile ilgilidir. Bu sebeple doğrusallık sınırlamasını genişleterek genel YEM yaklaşımına gizli değişkenlerin doğrusal olmayan ilişkilerini modele dâhil edilerek tahmin edilmesi mevcut YEM'i daha da iyi bir yöntem yapacaktır (Wall ve Amemiya, 2007: 321).

Tam bir ML (Lee ve Zhu, 2002) ve Bayesci (Arminger ve Muthén, 1998; Lee ve Song, 2003; Song ve Lee, 2007) gibi bazı sağlam istatistiksel yaklaşımlar doğrusal olmayan YEM'in çözümü için önerilmiştir. Bu iki yöntem en uygun istatistiksel özelliklere sahip olmanın yanı sıra simülasyon çalışmaları sonuçları da (Lee, Song ve Poon, 2004) diğer doğrusal olmayan YEM çözümleme tekniklerinden daha iyi sonuçlar verdiğini belirtmektedir (Lee vd., 2007: 405- 406).

Bayesci yaklaşım YEM'in ikinci kuşak çalışmalarının döneminde kabuledilebilir ve kullanılabilinir seviyede olmuştur. Yaklaşımın kullanılabilirliği için geliştirilen ilk paket program WinBUGS'tır. BUGS "Bayesian İnference Using Gibbs Sampling" Gibbs örneklemesi kullanarak Bayesci çıkarım için kullanılan bir yazılım paketidir. Yazılım hem akademik hem de ticari topluluklar için Bayesci modelleme bilincini artırmada etkili olmuştur. BUGS projesi 1989'da David Spiegelhalter'in araştırma grubu tarafından Cambridge' deki Tıbbi Araştırma Konseyi Biyoistatistik Birimi'nde başlamıştır. Simülasyon temelli yöntemlerin yaygın olarak tanıtılmasından önce Bayesci fikirlerin çözümleri, eşlenik analizler olarak adlandırılan analizlerden kapalı form ile elde edilen durumlarda uygulanabiliyordu. Bu nedenle BUGS birçok alanda karmaşık istatistiksel problemlerin analizini büyük ölçüde kolaylaştırmıştır. Yazılımın çok sayıdaki alanda sayısal uygulamaları mevcuttur. Örneğin genetik, çevrebilim, davranışsal çalışmalar, sağlık ekonomisi, eğitim performansı, ekonometri ve benzeri alanlarda uygulamaları mevcuttur (Lunn vd., 2009: 3049- 3050).

BUGS paket programı başlarda özel algoritmalarla sınırlı olup DOS ve Linux işletim sistemlerinde kullanılmaktaydı. 1997 yılına gelindiğinde ilk Windows sürümü olan WinBUGS programı tanıtılmıştır. Sonraki yıllarda WinBUGS daha karmaşık model yapıları göz önüne alınarak geliştirilmiştir. Takip eden bazı gelişmiş özelliklerin eklenmesiyle OpenBUGS üretilmiştir (Lykou ve Ntzoufras, 2011: 385). Bu iki program birbirinden çok farklı programlar değillerdir. Birinde bulunan gelişmiş bazı özellikler diğerinde bulunmayabilir. Böylelikle iki farklı önemli özelliğe sahip BUGS programları üretilmiştir.

Bu iki programın yanı sıra günümüzde yaklaşımın kullanılmasına izin veren bazı programlar ise şunlardır: Mplus, R (blavaan), Jags (Just Another Gibbs Sampler), Sas/Stat. Bu programlar vasıtasıyla uygulamacı araştırmacılar çalışmalarını gerçekleştirebilir fakat burada bazı zorlukların olduğu görmezden gelinemez. Bunlardan ilki ve en temeli, uygulamacı araştırmacıların çoğunluğunun Klasik istatistik yaklaşımları kullanmalarıdır. Bu sebeple ilk olarak Bayesci yaklaşımın çalışma prensibinin anlaşılması gerektiği düşünülmektedir. Çünkü araştırmacılar temel olarak parametreleri sabit, verileri ise rassal olduklarını varsaymaları gerektiği bilincinde olacaktırlar. Bu durum ise Bayesci yaklaşımla çelişmektedir. Çelişen durum aslında belirsizliğin ele alınıp alınmaması ile ilgilidir. Bayesci yaklaşım bilinmeyen parametreler için önsel bilgileri, analiz safhasına geçmeden önce elde edilmesi ister. Böylelikle veri ile önsel bilginin birleşiminde "bilginin güncellenmesi" olarak adlandırdığı bilimsel sonuçlara ulaşmaktadır (Gill, 2015: 97). Klasik yaklaşımda parametre tahminleme işlemi verilerin elde edilmesi ve bazı varsayımların (asimptotik teori çerçevesinde) sağlanması sonucunda gerçekleştirmektedir. Sonuç olarak da kabul ya da ret gibi sonuçlar üretilmektedir. Bu duruma Bayesci yaklaşım, bilgi ve karar üretilmesinin gerçekleştirilmediğini iddia ederek karşı çıkmaktadır. Kendi bakış açısıyla bilinmeyenler/belirsizlikler yani model parametreleri olasılıklar vasıtasıyla aydınlatılarak veri ile birleşiminden bilgi ve karar üretilmesini sağladıklarını düşünmektedirler (Ekici, 2005: 5- 6). Yani yaklaşım veri verildiğinde parametrenin alabileceği değerin aslında bilinmeyen yani bir olasılık olduğunu düşünmektedir. Örneğin gelir arttığında özel tüketim alışkanlıklarında bir artış olup olmayacağı bir olasılıktır. Bu yüzden bu durum hakkında bilgi ve karar üretebilmek için öncelikle bu olasılığın aydınlatılmasından hareket etmektedir. Klasik yaklaşımda ise, model kurulur ve veri toplanıp bu durumun analizi için bazı gerekliliklerin sağlanmasıyla sonuçlara varılmaktadır. Varılacak sonuç ise ya kabuldür ya da rettir.

Uygulamacı araştırmacıların doğrusal olmayan YEM'i Bayesci yaklaşımla değerlendirmelerinde bir diğer önemli zorluk ise yaklaşımı kullanmada ciddi istatistik bilgisinin yanı sıra notasyon/teknik bilginin de gerekli olmasıdır. Bu durum geliştirilen ilk programlarda (örn. WinBUGS, OpenBUGS) görülebilmektedir. Bu zorluk için öneri, mevcut literatürde sıkça kullanılan ve kabul değerliği oldukça yüksek olan Mplus ve R (blavaan) programlarının kullanılmasıdır. Bu iki programdan R ücretsiz bir erişime sahip olup aynı zamanda WinBUGS/ OpenBUGS ile de entegre bir çalışma yürütebilmektedir. Mplus ise ücretli bir erişime sahip olup demo sürümü ise oldukça kısıtlıdır.

Doğrusal olmayan model çalışmalarını gerçekleştirecek araştırmacıların çalışmalarında bazı noktaları aydınlatmaları gerekecektir. Doğrusal olmayan YEM'in tahmini için geliştirilen birçok yöntem olmasına rağmen, doğrusal olmayan yapının türü ve bu yapının gerekli olup olmadığı ile ilgilenilmesi gerekmektedir. Regresyon gibi açık değişken yöntemleriyle çalışırken, değişkenler arasındaki ilişkinin biçimini değerlendirmek için grafik yöntemleri kullanmak mümkündür. Ancak gizli değişken modellerinde, amaç gözlemlenemeyen yapıları modellemek olduğundan, uygun modeli belirlemek o kadar da kolay değildir. Diğer birçok istatistiksel yöntemde de olduğu gibi, uygun modeli belirlemek için kusursuz tek adımlı bir yöntem yoktur. Ancak doğrusal olmayan yapının gerekli olup olmadığı konusunda birkaç yöntem uygulanabilir. Bu yöntemlerden ilki gözlenen değişkenler ile yapılan saçılım grafiğidir. İkincisi faktör skorları ile yapılan saçılım grafiğidir. Üçüncüsü ise model uyumu ve karşılaştırılmasıdır (Codd, 2011: 31). Model karşılaştırması ile kastedilen çalışmada daha iyi bir nedenselliğin doğrusal olmayan model ile sağlandığının istatistiksel olarak ispat edilmesidir. Yani çalışmalarda doğrusal olmayan modelin yanı sıra doğrusal modelin de kurularak analiz edilmesidir. Bu iki modelin karşılaştırma testleri yardımıyla (örn. DIC) değerlendirilmesi sonucunda hangi modelin daha iyi bir nedensellik çıkardığı tespit edilebilir. Böylelikle doğrusal olmayan model için iyi bir sonuç elde edilir ise daha iyi bir nedensellik bu model ile sağlandığının kanıtı olur. Model uyumu konusuna gelince kurulacak iki model için Bayesci yaklaşımın kullandığı Sonsal Tahmin Kontrolü-ppp (Posterior Predictive p Value) değerleri modeller için değerlendirilebilinir. Bu test yardımıyla hangi modelin veri ile daha iyi bir uyum gösterdiği ortaya konulabilir. Bu husus da diğer önemli bir test olan Bayes faktörü eğer kullanılan paket program ile sağlanıyor ise model değerlendirme için oldukça önemli bir değerlendirmeyi verecektir.

Kaynakça

Altındağ, İ., (2015). *Bayesci Doğrusal Olmayan Yapısal Eşitlik Modeli.* Doktora Tezi. Konya: Konya Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Ando, T. (2010). *Bayesian Model Selection and Statistical Modeling*. CRC Press.

Arminger, G., & Muthén, B. O. (1998). A Bayesian Approach to Nonlinear Latent Variable Models using the Gibbs Sampler and the Metropolis-Hastings Algorithm. *Psychometrika*, *63*(3): 271-300.

Berger, J. O. (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. New York: Springer-Verlag.

Cham, H., West, S. G., Ma, Y., & Aiken, L. S. (2012). Estimating Latent Variable Interactions with Nonnormal Observed Data: A Comparison of Four Approaches. *Multivariate Behavioral Research*, *47*(6), 840-876.

Codd, C. L., (2011). *Nonlinear Structural Equation Models: Estimation and Applications*. Master Thesis. The Ohio State University Psychology.

Congdon, P. (2003). *Applied Bayesian Modeling.* Hoboken, New York: John Wiley & Sons, Inc..

Ekici, O., (2005). *Bayesyen Regresyon ve WinBUGS ile Bir Uygulama*. Yüksek Lisans Tezi. İstanbul: İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Gill, J. (2015). *Bayesian Methods: A Social and Behavioral Sciences Approach, Third Edition (3rd ed.)*. Chapman and Hall/CRC.

Harindranath, R.M., & Jacob J. (2018). Bayesian Structural Equation Modelling Tutorial for Novice Management Researchers. *Management Research Review, 41*(11), 1254-1270.

Holst, K. K., & Budtz-Jørgensen, E. (2020). A Two-Stage Estimation Procedure for Non-linear Structural Equation Models. *Biostatistics*, *21*(4), 676-691.

Jia, F., (2016). *Methods for Handling Missing Non-Normal Data in Structural Equation Modeling.* Phdthesis. University of Kansas.

Kaplan, D., & Depaoli, S. (2012). Bayesian Structural Equation Modeling. In R. H. Hoyle (Ed.), *Handbook of Structural Equation Modeling* (pp. 650–673). The Guilford Press.

Kelava, A., & Brandt, H. (2009). Estimation of Nonlinear Latent Structural Equation Models using the Extended Unconstrained Approach. *Review of Psychology, 16*(2), 123–131.

Kelava, A., & Nagengast, B. (2012). A Bayesian Model for the Estimation of Latent Interaction and Quadratic Effects when Latent Variables are Non-normally Distributed. *Multivariate Behavioral Research*, *47*(5), 717-742.

Kelava, A., Werner, C. S., Schermelleh-Engel, K., Moosbrugger, H., Zapf, D., Ma, Y., ... & West, S. G. (2011). Advanced Nonlinear Latent Variable Modeling: Distribution Analytic LMS and QML Estimators of Interaction and Quadratic Effects. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary journal*, *18*(3), 465-491.

Lee, S. Y. & Zhu, H. T. (2000). Statistical Analysis of Nonlinear Structural Equation Models with Continuous and Polytomous Data. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 53, 209–232.

Lee, S. Y. (2007). *Structural Equation Modeling: A Bayesian Approach*. John Wiley & Sons.

Lee, S. Y., & Song, X. Y. (2003). Model Comparison of Nonlinear Structural Equation Models with Fixed Covariates. *Psychometrika*, *68*(1): 27- 47.

Lee, S. Y., & Song, X. Y. (2004). Evaluation of the Bayesian and Maximum Likelihood Approaches in Analyzing Structural Equation Models with Small Sample Sizes. *Multivariate Behavioral Research*, *39*(4), 653-686.

Lee, S. Y., Song, X. Y., & Tang, N. S. (2007). Bayesian Methods for Analyzing Structural Equation Models with Covariates, Interaction, and Quadratic Latent Variables. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal*, *14*(3), 404-434.

Lee, S.Y., Song, X.Y., & Poon, W.Y. (2004). Comparison of Approaches in Estimating Interaction and Quadratic Effects of Latent Variables. *Multivariate Behavioral Research, 39*(1), 37–67.

Lunn D., Spiegelhalter D., Thomas A. & Best N. (2009). The BUGS Project: Evolution, Critique and Future Directions. *Statistics in Medicine*, *28*(25), 3049- 3067.

Lykou, A. & Ntzoufras, I. (2011). WinBUGS: a Tutorial. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, 3(5), 385-396.

Lynch, S. M. (2007). *Introduction to Applied Bayesian Statistics and Estimation for Social Scientists* (Vol. 1). New York: Springer.

Ma, B., (2006). *Bayesian Generalized Stuctural Equation Modeling*. Phdthesis. University of South Carolina Arnold School of Public Health.

Marsh, H. W., Wen, Z., & Hau, K. T. (2004). Structural Equation Models of Latent Interactions: Evaluation of Alternative Estimation Strategies and Indicator Construction. *Psychological Methods*, *9*(3), 275-300.

Marsh, H. W., Wen, Z., Nagengast, B., & Hau, K.T. (2012). Structural Equation Models of Latent Interaction. In R. H. Hoyle (Ed.), *Handbook of Structural Equation Modeling* (pp. 436–458). The Guilford Press.

Moosbrugger, H., Schermelleh-Engel, K., Kelava, A., & Klein, A. G. (2009). Testing Multiple Nonlinear Effects in Structural Equation Modeling: A Comparison of Alternative Estimation Approaches. In Teo & M. S. Khine (Eds.), *Structural Equation Modeling in Educational Research: Concepts and Applications* (pp. 103-136). Sense Publishers.

Muirhead, R. J. (1982). *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. New York: Wiley.

Muthén, B., & Asparouhov, T. (2012). Bayesian Structural Equation Modeling: A More Flexible Representation of Substantive Theory. *Psychological Methods*, *17*(3), 313-335.

Ozechowski, T. J. (2014). Empirical Bayes MCMC Estimation for Modeling Treatment Processes, Mechanisms of Change, and Clinical Outcomes in Small Samples. *Journal of Consulting and Clinical Psychology, 82*(5), 854–867.

Qin, L., (2018). *Comparing Bayesian Parametric and Semiparametric Estimation of Nonlinear Relationships in Structural Equation Models with Ordinal Data*. Phdthesis. University of Kansas, Psychology & Research in Education.

Scheines, R., Hoijtink, H., & Boomsma, A. (1999). Bayesian Estimation and Testing of Structural Equation Models. *Psychometrika*, *64*, 37-52.

Schumacker, R. E. (2002). Latent Variable Interaction Modeling. *Structural Equation Modeling*, *9*(1), 40-54.

Song, X. Y., & Lee, S. Y. (2006). Bayesian Analysis of Structural Equation Models with Nonlinear Covariates and Latent Variables. *Multivariate Behavioral Research*, *41*(3), 337-365.

Song, X. Y., & Lee, S. Y. (2012). A Tutorial on the Bayesian Approach for Analyzing Structural Equation Models. *Journal of Mathematical Psychology, 56*(3), 135–148.

Şen-Doğan, R., (2017). *Doğrusal Olmayan Yapısal Eşitlik Modellemesi: Bir Simülasyon Çalışması*. Doktora Tezi. Eskişehir: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Wall, M. M. & Amemiya, Y. (2007). *Nonlinear Structural Equation Modeling as a Statistical Method*. In Lee S.Y. (Ed.), *Handbook of Latent Variable and Related Models* (pp. 321-343). Sage Publications Ltd.

Wall, M. M. (2009). Maximum Likelihood and Bayesian Estimation for Nonlinear Structural Equation Models. In R. E. Millsap & A. Maydeu-Olivares (Eds.), *The Sage Handbook of Quantitative Methods in Psychology* (pp. 540–567). Sage Publications Ltd.

Wall, M. M., & Amemiya, Y. (2001). Generalized Appended Product Indicator Procedure for Nonlinear Structural Equation Analysis. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, *26*(1), 1-29.